UN ALGORITMO PARA RESOLVER EL PROBLEMA BINIVEL CON PARÁMETROS EN EL OBJETIVO DEL NIVEL INFERIOR

Aarón Arévalo Franco
UANL-FCFM
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

Resumen:
En este trabajo presentamos una reformulación del problema binivel con parámetros en el objetivo del nivel inferior haciendo uso de una aproximación externa de la función de reacción. Esto nos permitirá presentar el problema de dos niveles en uno de un solo nivel, con el fin de adaptarlo a un algoritmo reportado en la literatura basado en el método Branch and Bound.

Palabras claves: Programación Binivel, Branch and Bound

Introducción

Los problemas de Programación Binivel están motivados por sus aplicaciones (en el mundo real). Tales problemas surgen en los juegos de Stackelberg que tratan la economía de mercado [1], en donde los distintos tomadores de decisión tratan de comprender mejor las decisiones en el mercado con respecto a sus propios objetivos generalmente diferentes; sin embargo, a menudo son capaces de realizar sus decisiones de forma independiente, pero se ven obligados a actuar de acuerdo a una cierta jerarquía.

En este trabajo consideramos el caso más simple de tal situación donde solo hay dos tomadores de decisión, a eso se debe el nombre de binivel o dos niveles, caso particular del problema de Programación Multinivel. A los actores del caso binivel se les llama comúnmente líder y seguidor, respectivamente. El líder es el que puede manejar el mercado de forma independiente, mientras que el seguidor tiene que actuar de una manera dependiente a la decisión del líder.

Es obvio que, si un tomador de decisiones asume una posición independiente, y por tanto para observar y utilizar las reacciones del dependiente tomador de decisiones a las del líder, tratará de hacer una ventaja de esto.

Los Problemas de Programación Binivel son más generales que los juegos de Stackelberg en el sentido de que ambos conjuntos factibles pueden depender sobre la decisión de otro tomador de decisiones.

En términos matemáticos, el conjunto de variables es particionado en dos variables vectoriales, x y y; en donde y en R^n es la variable del líder y x en R^n es la variable del seguidor. Aplicado y como parámetro, el seguidor resuelve un problema de optimización paramétrico, y los valores $x=x(y)$ están determinados por el seguidor conociendo de antemano la elección y del líder. El líder tiene que determinar la mejor elección de y conociendo la reacción (óptima) $x = x(y)$ del seguidor a la decisión del líder. Tenemos un líder (nivel superior) que elige primero su decisión con el objetivo de minimizar una cierta función $f(x(y); y)$, y un seguidor (en el nivel inferior) que responde óptimamente a esta decisión.

Nuestro principal objetivo es proponer un algoritmo eficiente para resolver el Problema de Programación Binivel Entero Mixto (MIBLPP por sus siglas en inglés) en el caso particular cuando el parámetro aparece en la función objetivo del nivel inferior. El término entero mixto significa que el problema tiene ambas variables, continuas y discretas. Por otra parte, en nuestro caso, x es la variable vectorial continua y puede incluir variables discretas. Sabiendo que este problema es difícil de resolver, se propone un algoritmo de aproximación que nos conduce a una solución global.

Muchos autores han trabajado en las diferentes formulaciones de los problemas de Programación Binivel. En [2] se propuso un algoritmo basado en el método Branch and Bound cuando el parámetro aparece en el lado derecho de las restricciones del seguidor. En [3] se propuso un algoritmo para resolver el problema de Programación Lineal Binivel (BLPP) utilizando el Método Simplex con variables adicionales en el conjunto de base y la teoría de subgradientes. En [4] se obtuvieron límites superiores para las funciones objetivo en ambos niveles. Así se generó una secuencia no decreciente de límites inferiores de la función objetivo en el nivel superior, que, bajo ciertas condiciones, converge a la solución del BLPP general para funciones continuamente diferenciables.

En [5] se presentan varias alternativas para resolver el MIBLPP con las condiciones de integralidad. En [6] se resolvió el MIBLPP con el algoritmo Branch and Bound. El análisis de sensibilidad para MIBLPP también fue considerado en [7].

Especificación del Problema: El problema de Programación Binivel con parámetros en el objetivo del nivel inferior está dado como sigue:

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y \mid Gy = d, x \in \psi(y), y \in Z_+^n\} \tag{1}$$
$$\psi(y) = Arg\max_x\{(c + y^T \hat{c})^T x \mid Ax \leq \hat{d}, x \geq 0\}$$

en donde $a, b, x, y, c, \hat{c}, \hat{d}, \in, R^n$, G, es una matriz de dimensión $r \times n$, $d \in R^r$, A es una matriz $n \times n$. El líder resuelve su objetivo sujeto a un conjunto de restricciones en los cuales se encuentra otro problema de optimización: el problema del seguidor. Para cada señal que le envía el líder al seguidor, i. e, selecciona algún fijo y que es su variable de decisión y el seguidor replica mandando una respuesta al líder $x(y)$. Por lo tanto el líder minimiza $F(x(y),y)$.

En cada señal que manda el líder y el seguidor le replica, se puede expresar en una función comúnmente llamada función de reacción o función de valor óptimo. Esta función está dada como sigue:

$$\varphi(y) = \max_x\{(c + y^T \hat{c})^T x \mid Ax \leq \hat{d}, x \geq 0\} \tag{2}$$

Ahora, reformularemos el problema (1) de tal forma que podamos aplicar el algoritmo presentado en [8]. Para ello usamos el resultado descrito en [9], en el cual, un problema de dos niveles puede ser reformulado en un problema de un solo nivel de la siguiente manera:

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y \mid Gy = d, (c + y^T \hat{c})^T x \leq \varphi(y), \quad (3)$$
$$Ax \leq \hat{d}, x \geq 0, y \in Z_+^n\}$$

Geometría del problema: El problema que surge ahora es que en (3) la función de reacción no está dada en una forma explícita; es por ello que se analizará para conocer sus características geométricas. En [10] se demuestra que la función de reacción es lineal a trozos, convexa y no diferenciable (ver Figura 1). Algunos artículos han trabajado este tipo de problemas con cálculo sub-diferencial que se basan sobre la restricción de cualificación no suave de Mangasarian-Fromowitz [11]. En este trabajo resaltamos el hecho de que es convexa, y sobre esto, aplicamos el resultado de [8].

Un Algoritmo de Aproximación. Las bases para desarrollar un buen algoritmo están dadas en los siguientes teoremas bien conocidos, importantes para guardar la convexidad en cada nivel de aproximación.

Definición 1. La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen un subconjunto dado S en R^n es llamado el casco convexo de S y se denota por c*onv S*.

Teorema 1. Teorema de Carathéodory. Sea S cualquier conjunto de puntos en R^n, y sea $C = conv\, S$. Entonces $y \in C$ si y solo si y puede ser expresada como una combinación convexa de $n+1$ (no necesariamente distintos) puntos en S. De hecho C es la unión de todos los d-dimensionales simples generalizados cuyos vértices pertenecen a S, en donde $d = dimC$.

Corolario 1. Sea $\{Ci|i\in I\}$ una colección arbitraria de conjuntos convexos en R^n, y sea C el casco convexo de la unión de la colección. Entonces cada punto de C puede ser expresado como una combinación convexa de $n+1$ o menos puntos afinamente independientes, cada uno perteneciendo a alguno de los C_i.

Teorema 2. La intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

El casco convexo *conv S* es un conjunto convexo por el Teorema 2, el único más pequeño que contiene S.

Los detalles y las demostraciones de los Teoremas 1 y 2 y del Corolario 1 pueden ser encontrados en [12]. Ahora, describimos el algoritmo propuesto como sigue:

Paso 0. Inicialización. Sea la lista inicial de problemas incluyendo solamente la Aproximación del Problema Entero (APE) construida del siguiente modo:

Consideramos el problema (3):

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y \mid Gy = d, (c + y^T \hat{c})^T x \leq \varphi(y),$$
$$Ax \leq \hat{d}, x \geq 0, y \in Z_+^n\}$$

Ahora, consideramos el politopo Y compuesto como un casco convexo de las estrategias del líder en el nivel superior: $Y = \{ y \mid Gy = d, y \geq 0\}$ y seleccionamos $\boldsymbol{n}+1$ puntos afinamente independientes y^i tales que $Y \subset$ conv $\{y^1,...,y^{m+1}\} \subset \{y : |\phi(y)| < \infty\}$. Aquí $\boldsymbol{n} = n - rango(G)$, y $y^2 - y^1, y^3 - y^1, ..., y^{n+1} - y^1$, forman un sistema linealmente independiente. Denotamos este conjunto de vértices como $V = \{y^1,...,y^{n+1}\}$. También consideramos un valor de tolerancia $\varepsilon > 0$. Entonces, resolvemos el problema de Programación Lineal del nivel inferior (5) en cada vértice, i.e., encontrar ℚ(y1),…, ℚ(yn+1).

Ahora bien, construimos la primera aproximación de la función de valor óptimo como sigue:

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{\hat{m}+1} \lambda_i \varphi(y^i), \quad (4)$$

definido sobre

$$y = \sum_{i=1}^{\hat{m}+1} \lambda_i y^i, \quad (5)$$

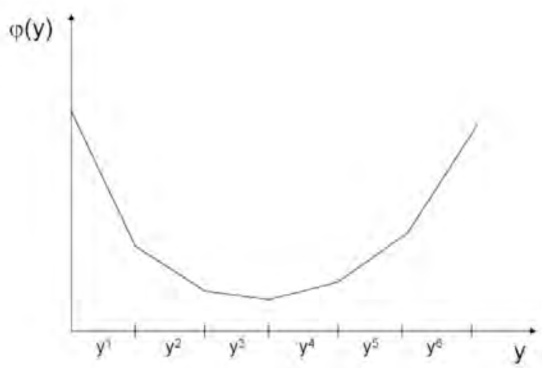

Fig 1. Representación de φ en 1 dimensión.

con $\lambda_i \geq 0$, i = 1,...,**m**+*1 y:*

$$\sum_{i=1}^{\hat{m}+1} \lambda_i = 1 \qquad (6)$$

En (4) tenemos una expresión con la variable λ, que nos conduce a la variable y usando (5) y (6). Ahora, ya que la función φ es convexa, <c,x> ≤ φ(y) ≤ Φ(y), la condición <c,x> ≤ φ(y) puede ser remplazada en (3) con la siguiente desigualdad explícita: <c,x> ≤ Φ(y).

Con esto obtenemos un nuevo problema de optimización que puede ser resuelto con el Método Simplex Clásico. La Aproximación del problema entero es descrita como sigue:

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y \mid Gy = d, (c + y^T \hat{c})^T x \leq \Phi(y),$$
$$Ax \leq \hat{d}, x \geq 0, y \in Z_+^n\} \qquad (7)$$

sea $t = 1$, y $zt = +\infty$, en donde zt es el valor objetivo incumbente. Ponemos este problema dentro de la lista. Por definición, este problema corresponde al poliedro convexo Y. Ir al Paso 1.

Paso 1. Terminación. Detener el algoritmo si la lista de problemas es vacía. O si la condición: $\|(x^s, y^s)-(x^{s-1}, y^{s-1})\| < \varepsilon$; es válida, seleccionamos el punto (x^s; y^s) como una solución aproximada del problema de Programación Entera (3); de otra forma, seleccionar arbitrariamente y remover un problema de la lista. Ir al paso 2.

Paso 2. Resolver el problema tomado de la lista usando métodos comunes para Programación Entera como Branch and Bound para resolver la restricción de integralidad. Denotamos al conjunto de las soluciones óptimas básicas como $S = \{(x^{1R}; y^{1R}),...\}$ y z^R como la función de valor objetivo. Si el problema no tiene soluciones factibles, o si esta función de valor óptimo es mayor que zt, entonces cortamos esta rama. Asignar $z_{t+1} = z_t$, $t = t+1$ y vamos al Paso 1. De otra forma vamos al Paso 3.

Paso 3. Si las componentes y de todas las soluciones pertenecientes a *S* son vértices de *V*, entonces guardamos las soluciones, asignamos $z_{t+1} = z^R$, $t = t + 1$ y vamos al Paso 1 (para tales valores de y, el punto (*x, y*) es factible para el problema (6)). De otra manera, considerando la solución (x^{jR}; y^{jR}) de S tal que la componente y^{jR} es diferente de todos los vértices de V, añadimos y^{jR} a V, asignamos $z_{t+1} = z_t$, $t = t+1$ y vamos al Paso 4.

Paso 4. Subdivisión. Hacer una subdivisión del conjunto Y correspondiente a este problema. Por construcción, el problema (7) corresponde a un conjunto de ***n***+*1* puntos afinamente independientes, los cuales sin pérdida de generalidad asumimos sean los puntos $y^1,...,y^{n+1}$. Añadiendo el punto y^{jR} a este conjunto, estos vienen a ser afinamente independientes. Excluyendo un elemento del conjunto resultante, la independencia afina puede ser obtenida eventualmente (esto está garantizado si algún elemento correcto es eliminado).

Cuando uno hace uso de esta aproximación, a lo más **n**+*1* nuevos conjuntos afinamente independientes surgen, cada uno correspondiendo a nuevas aproximaciones lineales de la función objetivo del nivel inferior sobre el casco convexo de esos puntos. Si un tal simplex T es un subconjunto de alguna región de estabilidad: T ⊂ ***R****(Bi)*, los puntos factibles (x, y) del problema (7) son también factibles para el problema (3).

El objetivo de este paso es encontrar esas simples subdivisiones subsecuentes del conjunto *Y*. Estos problemas son entonces añadidos a la lista de problemas. Para calcular la nueva aproximación de la función de valor óptimo del nivel inferior procederemos como sigue: Primero calcular $\varphi(y^{jR})$. Entonces construir un conjunto de puntos afinamente independientes como se describió anteriormente, i.e., eliminar uno de los puntos, digamos y^l, y calcular

$$\Phi_l(y) = \sum_{i=1, i\neq l}^{\hat{m}+1} \lambda_i \varphi(y^i) + \mu\varphi(y^{jR}), \qquad (8)$$

definido sobre

$$y = \sum_{i=1, i\neq l}^{\hat{m}+1} \lambda_i y^i + \mu y^{jR}, \qquad (9)$$

con $\lambda i \geq 0$ i = 1,...,***m*** +1 y

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{\hat{m}+1} \lambda_i + \mu = 1, \qquad (10)$$

para l∈{1,...,***n***+1}. Así construimos a lo más ***n***+1 nuevos problemas:

$$(P^l) \ \min_{x,y}\{a^T x + b^T y \mid Gy = d, (c + y^T \hat{c})^T x \leq \Phi_l(y),$$
$$Ax \leq \hat{d}, x \geq 0, y \in Z_+^n\} \qquad (11)$$

y los añadimos a la lista de problemas. Vamos al Paso 1.

Referencias

[1] Stackelberg, H.v. *Marktform und Gleichgewicht.* Vienna, Austria: Julius Springer. 1934. English translation: The Theory of the Market Economy. Oxford: Oxford University Press. 1952.

[2] Dempe, S., Kalashnikov, V. and Ríos-Mercado, R.Z. "Discrete bilevel programming: Application to a natural gas cash-out problem". *European Journal of Operational Research.* Vol. 166, No. 2, pp. 469-488. 2005.

[3] Dempe, S. "A simple algorithm for the linear bilevel programming problem". *Optimization.* Vol. 18, No. 3, pp. 373 – 385. 1987.

[4] Bard, J. "An algorithm for solving the general bilevel programming problem". *Mathematics of Operations Research.* Vol. 8, No. 2, pp. 260-282.

[5] Dempe, S. and Kalashnikov, V. Discrete *Bilevel Programming with Linear Lower Level Problems.* Preprint, TU Bergakademie Freiberg. 2005.

[6] Wen, U.P. and Yang, Y.H. "Algorithms for solving the mixed integer two level linear programming problem". *Computers and Operations Research.* Vol. 17, No. 2, pp. 133 – 142. 1990.

[7] Wendell, R.E. "A preview of a tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming". *Discrete Mathematics.* Vol. 38, pp. 121— 124. 1982.

[8] Kalashnykova, N., Kalashnykov, V., Dempe, S. and Arévalo Franco A. "Application of a Heuristic Algorithm to Mixed-Integer Bi-level Programming Problems". *ICIC International.* Volume 7, Number 4, pp. 1819–1829. 2011.

[9] Ye, J.J. and Zhu, D.L. "Optimality conditions for bilevel programming problems". *Optimization*. Vol. 33, pp. 9 – 27. 1995.

[10] Dempe, S. and Schreier,H. *Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden*. Teubner Verlag. Wiesbaden. 2006.

[11] Dempe, S. and Zemkoho, A.B. *A Bilevel Approach to Optimal Toll Setting in Capacitated Networks*, Preprint, TU Bergakademie Freiberg. 2008.

[12] Rockafellar, R.T. *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. 1970.

[13] Dempe, S. *Foundations of Bilevel Programming.* Dordrecht/London/Boston: Kluwer Academic Publishers. 2002.

[14] Grygarová, L. "Qualitative Untersuchung des I. Optimierungsproblems in mehrparametrischer Programmierung". Applications of Mathematics, Vol. 15, No. 4, pp. 276 – 295. 1970.

Datos del Autor:

Dr. Aarón Arévalo Franco

Cursó su Lic. En Matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Cursó el doctorado en Ingeniería Física Industrial en el Posgrado de la misma institución. Además realizó una estancia en la Technische Universität Bergakademie Freiberg en Alemania, misma en la cual realizó su Posdoctorado. Actualmente se desempeña como Profesor Investigador en el Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas de la Facultad de Físico Matemáticas en la UANL. Sus líneas de investigación son la Programación Binivel y la teoría de la Complementariedad.

Dirección del autor: Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas de la UANL. Av. Pedro de Alba y M.L. Barragán S/N. Cd. Universitaria,. San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

Email: aaronare@yahoo.mx